

3.2.12 Obvody a obsahy obrazců I

Předpoklady:

S pomocí vzorců v uvedených v tabulkách řeš následující příklady

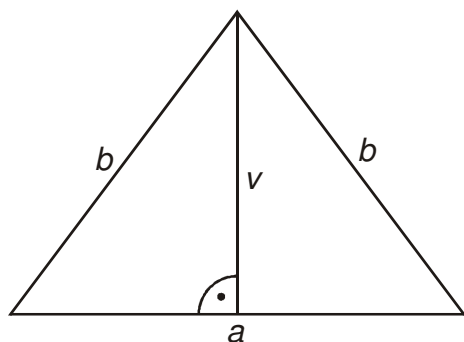
Př. 1: Urči výšku lichoběžníku o obsahu 54cm^2 a základnách 7cm a 5cm .

$$\text{Obsah lichoběžníku: } S = \frac{a+c}{2}v \Rightarrow v = \frac{2S}{a+c} = \frac{2 \cdot 54}{7+5} \text{cm} = 9 \text{cm}$$

Výška lichoběžníku je 9cm .

Př. 2: Vypočti obsah rovnoramenného trojúhelníku se základnou o délce $a = 6\text{cm}$ a ramenem o velikosti $b = 5\text{cm}$.

Vzorec pro obsah trojúhelníka $S = \frac{a \cdot v_a}{2} \Rightarrow$ musím spočítat výšku na jednu ze stran, které známe



Trojúhelník je rovnoramenný \Rightarrow výška na základnu je zároveň těžnicí \Rightarrow

$$b^2 = v^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$v = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{5^2 - \left(\frac{6}{2}\right)^2} \text{cm} = 4 \text{cm}$$

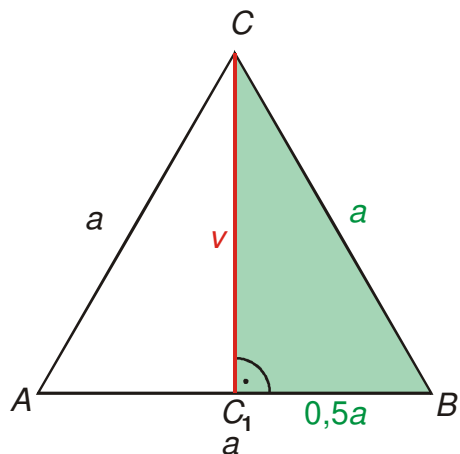
$$\text{Spočteme obsah: } S = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{6 \cdot 4}{2} \text{cm}^2 = 12 \text{cm}^2$$

Př. 3: Urči stranu rovnostranného trojúhelníku s obsahem 15cm^2 .

Vzorec pro obsah rovnostranného trojúhelníka můžeme upravit do tvaru, kdy obsahuje pouze velikost strany a .

$$S = \frac{a \cdot v_a}{2}$$

Výšku určíme pomocí Pythagorovy věty:



$$a^2 = v^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$v^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3}{4}a^2 \Rightarrow v = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

$$S = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

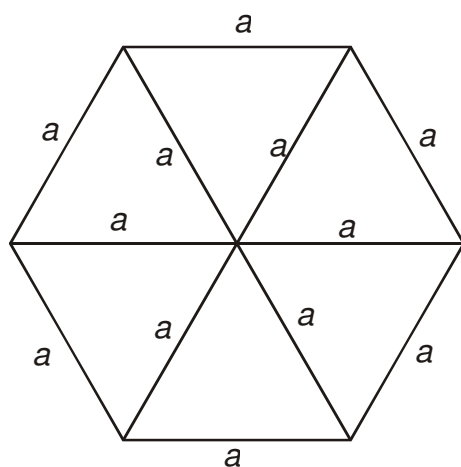
Vyjádříme a : $\frac{4S}{\sqrt{3}} = a^2$

$$a = \sqrt{\frac{4S}{\sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 15}{\sqrt{3}}} \text{ cm} = 5,9 \text{ cm}$$

Rovnostranný trojúhelník s obsahem 15 cm^2 má stranu o délce $5,9 \text{ cm}$.

Pedagogická poznámka: Pokud mají studenti k dispozici tabulky, většinou se jim podaří objevit vzorec pro obsah rovnostranného trojúhelníku a příklad se zjednoduší na vyjádření ze vzorce.

Př. 4: Odvod' vzorec pro obsah pravidelného šestiúhelníku o straně a .



Pravidelný šestiúhelník je možné rozložit na šest stejných rovnostranných trojúhelníků o straně a (šestiúhelník je vepsán kružnici, je možné ho rozložit na šest stejných rovnoramenných trojúhelníků, jejich vrcholové úhly u středu šestiúhelníka jsou stejné a musí

dát dohromady 360° , každý z nich je tedy roven 60° a všechny trojúhelníky jsou tedy rovnostranné).

$$S = 6 \cdot S_{\triangle} = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2$$

Př. 5: Urči obsah obecného trojúhelníka o stranách $a = 5 \text{ cm}$, $b = 6 \text{ cm}$, $c = 7 \text{ cm}$. Urči délky všech jeho výšek.

Zadaný trojúhelník není pravouhlý, nemá žádnou jinou speciální vlastnost \Rightarrow nedokážeme spočítat výšku a nemůžeme použít vzorec $S = \frac{a \cdot v_a}{2} \Rightarrow$ hledáme vzorec pro výpočet obsahu

ze stran \Rightarrow Heronův vzorec: $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, $s = \frac{a+b+c}{2}$

$$s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{5+6+7}{2} \text{ cm} = 9 \text{ cm}$$

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{9(9-5)(9-6)(9-7)} \text{ cm}^2 = 6\sqrt{6} \text{ cm}^2 \doteq 14,7 \text{ cm}^2$$

Výšky můžeme určit pomocí vzorce pro výpočet obsahu (už ho známe).

$$S = \frac{a \cdot v_a}{2} \Rightarrow v_a = \frac{2S}{a} = \frac{2 \cdot 6\sqrt{6}}{5} \text{ cm} = \frac{12\sqrt{6}}{5} \text{ cm} \doteq 5,9 \text{ cm}$$

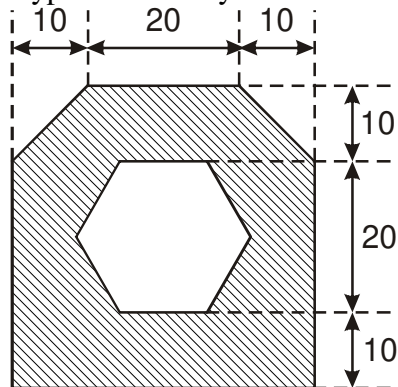
Podobně i zbývající výšky: $v_b = \frac{2S}{b} = \frac{2 \cdot 6\sqrt{6}}{6} \text{ cm} = 2\sqrt{6} \text{ cm} \doteq 4,9 \text{ cm}$

$$v_c = \frac{2S}{c} = \frac{2 \cdot 6\sqrt{6}}{7} \text{ cm} = \frac{12}{7}\sqrt{6} \text{ cm} \doteq 4,2 \text{ cm}$$

Pedagogická poznámka: Více než polovina studentů má problémy při určování výšek.

Automaticky se zadání snaží vyřešit pomocí vět pro pravouhlý trojúhelník a ani je nenapadne uvažovat o použití vzorce pro obsah (mají ho v paměti zařazený zcela jednosměrně jako cestu k počítání obsahu).

Př. 6: Vypočti obsah vyšrafovaného obrazce (vzdálenosti jsou udané v cm):

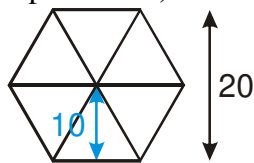


Obrazec je tvořen čtvercem $40 \text{ cm} \times 40 \text{ cm}$, ze kterého jsou vyříznuty tři kusy:

- dva pravouhlé trojúhelníky s odvěsnami 10 cm a 10 cm . Dohromady tvoří čtverec $10 \text{ cm} \times 10 \text{ cm}$
- pravidelný šestiúhelník o výšce 20 cm

odečtením ploch výřezů od plochy velkého čtverce získáme výsledek

pro určení plochy šestiúhelníku musíme znát jeho stranu (vzorec pro obsah jsme odvodili v příkladu 3)



Pokud je výška celého šestiúhelníku 20 cm, rovná se výška rovnostranných trojúhelníků, ze kterých je složen, 10 cm \Rightarrow dosazením do vztahu pro výšku určíme stranu šestiúhelníku:

$$v = \frac{\sqrt{3}}{2} a \Rightarrow a = \frac{2}{\sqrt{3}} v = \frac{20}{\sqrt{3}} \text{ cm}$$

$$S = S_1 - S_2 - S_3 = 40^2 - 10^2 - \frac{3\sqrt{3}}{2} \left(\frac{20}{\sqrt{3}} \right)^2 \text{ cm} = 1600 - 100 - 200\sqrt{3} \text{ cm} = 100(15 - 2\sqrt{3}) \text{ cm}$$

$$S \doteq 1154 \text{ cm}^2$$

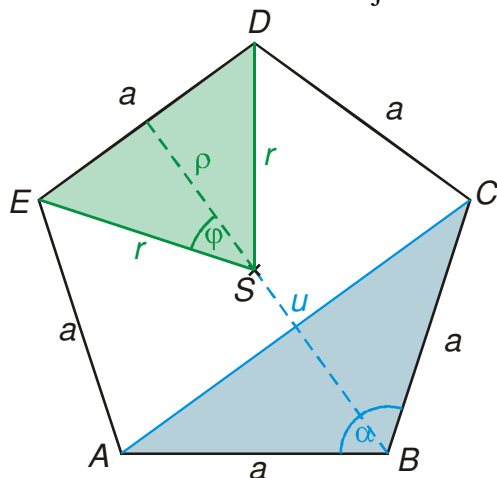
Vyšrafovaný obrazec má přibližně povrch 1154 cm^2 .

Př. 7: Urči obvod a obsah pravidelného pětiúhelníku, má-li jeho nejkratší úhlopříčka délku 10 cm.

Obvod pravidelného pětiúhelníku: $o = na = 5a$

Obsah pravidelného pětiúhelníku: $S = n \frac{a\rho}{2} = \frac{5}{2} a\rho$

\Rightarrow musíme ze zadaného údaje určit délku strany a poloměr kružnice vepsané.



Určení strany a z rovnoramenného trojúhelníku ABC :

Součet vnitřních úhlů v pětiúhelníku: $(n-2) \cdot 180^\circ = (5-2) \cdot 180^\circ = 540^\circ$

Velikost úhlu α : $\frac{540^\circ}{5} = 108^\circ$

Úsečka BS dělí trojúhelník na dva shodné pravoúhlé trojúhelníky s úhlem $\frac{\alpha}{2} \Rightarrow$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{u}{a} \Rightarrow a = \frac{u}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{10}{2 \cdot \sin \frac{108^\circ}{2}} \text{ cm} \doteq 6,18 \text{ cm}$$

Určení poloměru kružnice vepsané z trojúhelníku EDS :

Úhel ESD je pětinou plného úhlu: $\sphericalangle ESD = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$.

Přímka BS dělí rovnoramenný trojúhelník EDS na dva shodné pravoúhlé trojúhelníky \Rightarrow

$$\varphi = \frac{\sphericalangle ESD}{2} = \frac{72^\circ}{2} = 36^\circ$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\frac{a}{2}}{\rho} \Rightarrow \rho = \frac{a}{2 \operatorname{tg} \varphi} = \frac{6,18}{2 \cdot \operatorname{tg} 36^\circ} \text{ cm} \doteq 4,25 \text{ cm}$$

Dosazení do vzorců:

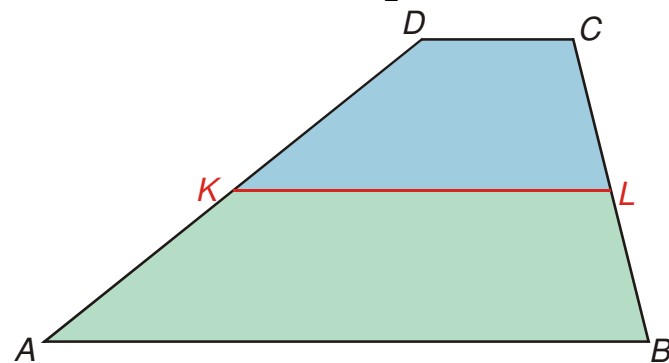
Obvod: $o = na = 5a = 5 \cdot 6,18 \text{ cm} = 30,9 \text{ cm}$

Obsah: $S = n \frac{a\rho}{2} = \frac{5}{2} a\rho = \frac{5}{2} 6,18 \cdot 4,25 \text{ cm}^2 = 65,7 \text{ cm}^2$

Pravidelný pětiúhelník s nejkratší úhlopříčkou o délce 10 cm, má obvod 30,9 cm a obsah 65,7 cm².

Př. 8: Střední příčka rozdělí lichoběžník na dva menší lichoběžníky. Urči poměr jejich obsahů.

Obsah lichoběžníku: $S = \frac{(a+c)v}{2}$



Střední příčka je průměrem obou základů: $s = \frac{a+c}{2}$.

Modrý lichoběžník: $S_m = \frac{(s+c)\frac{v}{2}}{2} = \frac{\left(\frac{a+c}{2}+c\right)v}{4} = \frac{\left(\frac{a+3c}{2}\right)v}{4} = \frac{(a+3c)v}{8}$.

Zelený lichoběžník: $S_z = \frac{(a+s)\frac{v}{2}}{2} = \frac{\left(a+\frac{a+c}{2}\right)v}{4} = \frac{\left(\frac{3a+c}{2}\right)v}{4} = \frac{(3a+c)v}{8}$.

Poměr lichoběžníků: $\frac{S_m}{S_z} = \frac{\frac{(a+3c)v}{8}}{\frac{(3a+c)v}{8}} = \frac{a+3c}{3a+c}$.

Vzniklé lichoběžníky mají v obsahy v poměru $\frac{a+3c}{3a+c}$.

Shrnutí:

